

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Pe diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $\overline{BD} = 3 \cdot \overline{BM}$. Fie P , punctul ales astfel încât $2 \cdot \overline{AP} = 3 \cdot \overline{AM}$. Demonstrați că:

- a) $\overline{AM} = \frac{1}{3}(2\overline{AB} + \overline{AD})$;
 b) $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{AD}$
 c) punctele B, P și C sunt coliniare.

Nicu Miron, Iași

Soluție.

a) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{BD} = \overline{AB} + \frac{1}{3}(\overline{AD} - \overline{AB}) = \frac{1}{3}(2\overline{AB} + \overline{AD})$, 2p

b) $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} \Rightarrow \overline{BP} = \overline{AP} - \overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AM} - \overline{AB} = \frac{1}{2}(2\overline{AB} + \overline{AD}) - \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ 3p

c) Din $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{AD} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC} \Rightarrow B, P$ și C sunt coliniare. 2p

2. Se consideră o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ având următoarele proprietăți:

- (i) $f(m+2n) = f(m) + 2f(n)$, pentru orice numere impare m și n ;
 (ii) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ pentru orice numere m și n de aceeași paritate.

a) Calculați $f(1)$, $f(3)$ și $f(5)$;

b) Demonstrați prin inducție completă că $f(2n+1) = 2n+1, (\forall) n \in \mathbb{N}$

Gazeta Matematică 7-8-9/2010, modificată

Soluție.

a) Pentru $m=n=1$, condiția (ii) conduce la $f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 1$, întrucât f ia numai valori nenule 2p

Pentru $m=n=1$, condiția (i) conduce la $f(3) = f(1) + 2f(1) = 3$ 1p

Pentru $m=3$ și $n=1$, din (i) rezultă $f(5) = 5$ 1p

b) Verificările pentru $m \in \{0,1,2\}$ sunt deja făcute.

Presupunem că $f(2k+1) = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ și să demonstrăm că $f(2k+3) = 2k+3$, 1p

În (i), considerăm $m=2k+1$ și $n=1$. Obținem $f(2k+3) = f(2k+1) + 2f(1) = 2k+3$ 2p

3. Mulțimea $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ se numește "aritmetică" dacă unul dintre elementele ei este media aritmetică a celorlalte două. (De exemplu mulțimea $\{3, 10, 17\}$ este "aritmetică", întrucât: $10 = \frac{3+17}{2}$). Considerăm mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$.

i) Justificați faptul că $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ este "aritmetică" dacă și numai dacă este de forma

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

$$A = \{a, a+r, a+2r\} \text{ cu } a, r \in \mathbb{N}^*.$$

ii) Să se determine numărul de submulțimi "aritmice" ale mulțimii M.

Soluție.

- i) Echivalența este evidentă, întrucât, într-o mulțime nu contează ordinea elementelor 2p
- ii) Fie $A = \{a, a+r, a+2r \mid a, r \in \mathbb{N}^*\}$ o submulțime aritmetică a mulțimii M.
- Din $a+2r \leq 11 \Rightarrow r \leq 5$ 2p
1. $r=1 \Rightarrow a \leq 9 \Rightarrow (\exists)$ nouă submulțimi "aritmice" de forma $\{a, a+1, a+2\}$, cu $a = \overline{1,9}$ 0,5p
2. $r=2 \Rightarrow a \leq 7 \Rightarrow (\exists)$ șapte submulțimi "aritmice" de forma indicată 0,5p
3. $r=3 \Rightarrow a \leq 5 \Rightarrow (\exists)$ cinci submulțimi "aritmice" de forma indicată 0,5p
4. $r=4 \Rightarrow a \leq 3 \Rightarrow (\exists)$ trei submulțimi "aritmice" de forma indicată 0,5p
5. $r=5 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow (\exists)$ o submulțime "aritmetică" de forma indicată 0,5p
- Așadar există $9+7+5+3+1=25$ submulțimi "aritmice" ale lui M 0,5 p

4. O ciocolată are forma unui dreptunghi, împărțit cu ajutorul unor linii orizontale și verticale în dreptunghiuri mai mici (pe care le vom numi "pătrățele").
- a) Cătălin taie ciocolata cu un cuțit astfel încât tăietura să treacă prin centrul dreptunghiului. Demonstrați că el va obține două bucăți cu arii egale, indiferent de poziția tăieturii.
- b) Presupunem ca din ciocolată lipsește un "pătrățel" oarecare. Cum poate proceda Cătălin pentru ca, în acest caz, printr-o singură tăietură de cuțit, să împartă ciocolata în două bucăți având arii egale?

Soluție.

- a) Dacă tăietura se face după o diagonală sau orizontal / vertical, concluzia este evidentă 1p
- Fie d o dreaptă care taie laturile (AB) și (CD) ale dreptunghiului $ABCD$ în M , respectiv N și care trece prin centrul O al dreptunghiului. Dacă P și Q sunt proiecțiile lui O pe (AB) , respectiv pe (CD) , atunci $\Delta POM \equiv \Delta QON$ (C.U.), prin urmare $QN = PM$ 2p
- Deducem că $AM = CN$ și $BM = DN$, de unde urmează că trapezele $AMND$ și $CNMB$ au bazele omoloage egale și înălțimi egale, au arii egale. 2p
- b) Conform celor justificate la punctul a), rezultă că dreapta care unește centrul dreptunghiului mare cu centrul "pătrățelului" care lipsește împarte atât dreptunghiul inițial, cât și "pătrățelul", în părți de arii egale. 2p

OBS: Dacă soluția corectă este dată direct pe cazul general, se acordă punctajul maxim.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Între localitățile A și B sunt 54 km. Cătălin pleacă din localitatea A spre localitatea B și parcurge, în prima etapă 24 km cu viteză constantă. Apoi se odihnește o oră și ajunge în localitatea B după 14 ore de la plecare, mergând cu viteză dublă față de viteza din prima etapă. Determinați viteza cu care s-a deplasat Cătălin în prima etapă.

Soluție.

Fie v km/h viteza de deplasare în prima etapă.

În a doua etapă Cătălin va avea viteza $2v$ km/h 1p

Dacă t_1 este timpul (în ore) în care Cătălin parcurge primii 24km, iar t_2 este timpul (în ore) în care Cătălin parcurge următorii 30km, avem $t_1 + t_2 = 13$ 2p

Dacă d este distanța parcursă în intervalul de timp t ore cu viteza constantă v , atunci $d = v \cdot t$... 1p

Conform enunțului avem $\begin{cases} v \cdot t_1 = 24 \\ 2v \cdot t_2 = 30 \end{cases}$ 2p

Obținem $v \cdot (t_1 + t_2) = 39 \Rightarrow 13 \cdot v = 39 \Rightarrow v = 3$ km/h 1p

2. Se dau numerele reale $x, y, z \in (1, +\infty)$ și $a > 0$. Demonstrați că:

a) $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \sqrt{xy}$;

b) $a + \frac{1}{a} \geq 2, (\forall) a \in (0, \infty)$;

b) $\log_x \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \log_y \frac{z^2 + x^2}{z + x} + \log_z \frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq 3$.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeș

Soluție.

a) $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 \geq xy(x + y)^2 \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ 1p

$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$ 1p

b) $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$ (adevărată) 2p

c) Conform cu a) și ținând seama de monotonia funcției logaritmice în baza supraunitară, este suficient să demonstrăm că $\log_x \sqrt{yz} + \log_y \sqrt{zx} + \log_z \sqrt{xy} \geq 3$ 1p

Inegalitatea este echivalentă cu $(\log_x y + \log_y x) + (\log_x z + \log_z x) + (\log_y z + \log_z y) \geq 6$ 1p

Apoi $\left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y}\right) + \left(\log_x z + \frac{1}{\log_x z}\right) + \left(\log_z y + \frac{1}{\log_z y}\right) \geq 6$, care este evidentă, conform cu b) 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

3. Se dau numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$.
- a) Demonstrați că dacă $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+ab} = \frac{1}{2}$, atunci $a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1 = 0$;
- b) Descompuneți în factori expresia $E(a, b) = a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1$;
- c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} - \frac{1}{1+6^x} = \frac{1}{2}$.
- Gazeta Matematică 10/2010, modificată*

Soluție:

- a) Demonstrează prin calcul direct implicația 2p
- b) $E(a, b) = (a-1)(b-1)(ab-1)$ 2p
- c) Notează $2^x = a, 3^x = b \Rightarrow 6^x = ab$ 1p
- Din a) și b) deduce că ecuația este echivalentă cu $(2^x - 1)(3^x - 1)(6^x - 1) = 0$, care are soluția unică $x = 0$ 2p
4. a) Se dau numerele complexe $z_1 = a + ib$ și $z_2 = b + ia$, de modul 1.

Să se demonstreze că $z_2 = \frac{i}{z_1}$.

- b) Cătălin trebuie să înmulțească 2011 numere complexe de modul 1. Din greșeală, el schimbă între ele partea reală cu coeficientul părții imaginare, la fiecare factor al produsului și astfel obține drept rezultat final numărul $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Care trebuia să fie rezultatul corect al produsului celor 2011 numere complexe?

Gabriel Popa, Iași

Soluție.

- a) $z_1 \cdot z_2 = (a^2 + b^2) \cdot i = i \Rightarrow z_2 = \frac{i}{z_1}$ 2p
- b) Fie $z_1, z_2, \dots, z_{2011}$ cele 2011 numere complexe de modul 1 și $P = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{2011}$ produsul lor. Schimbând partea reală cu coeficientul părții imaginare, conform cu a) el va obține produsul $P^* = \frac{i}{z_1} \cdot \frac{i}{z_2} \cdot \dots \cdot \frac{i}{z_{2011}} = \frac{i^{2011}}{P} = -\frac{i}{P}$ 3p
- Așadar $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{i}{P} \Rightarrow P = \frac{-i}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 1p
- Obține rezultatul corect $P = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{N})$. Câte astfel de matrice au proprietatea că atât

suma elementelor de pe diagonala principală, cât și suma elementelor de pe diagonala secundară, sunt egale cu 7?

Lucian-Georges Lăduncă, Iași

Soluție.

$a + c + e = b + c + d \Leftrightarrow a + e = b + d$ 1p

Dacă $c = 0$, trebuie să avem $\begin{cases} a + e = 7 \\ b + d = 7 \end{cases}$, de unde rezultă că perechile (a, e) și (b, d) pot fi

alese fiecare în câte opt moduri, așadar, în acest caz vom obține $8 \cdot 8 = 64$ de matrice cu proprietatea din enunț. 3p

Analog, pentru $c = 1$, vom obține $7 \cdot 7 = 49$ matrice de forma cerută, pentru $c = 2$, obținem 36 matrice de forma cerută, ..., iar pentru $c = 7$ obținem o matrice de forma cerută 2p

În total vom avea $8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 1^2 = 204$ matrice de forma cerută 1p

2.

Se dă funcția $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{\frac{2 - |x - 2|}{2 + |x - 2|}}$.

a) Să se determine mulțimea maximă de existență a funcției f ;

b) Să se studieze continuitatea funcției f pe această mulțime;

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{|x-2|}}$;

d) Să se cerceteze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{x-2}}$

Soluție:

a) $2 - |x - 2| \geq 0 \Leftrightarrow |x - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow E = [0, 4]$ este mulțimea maximă de existență 1p

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}} & \text{dacă } x \in [0, 2) \\ \sqrt{\frac{4-x}{x}} & \text{dacă } x \in [2, 4] \end{cases}$ 2p

$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} f(x) = f(2) = 1 \Rightarrow f$ este continuă în $x_0 = 2$, deci pe E 1p

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{2-x}} = \frac{1}{e}$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{4-x}{x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{e}$. Așadar $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{|x-2|}} = \frac{1}{e}$ 1p

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (f(x))^{\frac{2}{x-2}} = e$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Așadar, nu există $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{x-2}}$ 1p

3. Cătălin și Simona își trimit mesaje codificate procedând în felul următor:
 - atribuie literelor alfabetului, excluzând diacriticele, numere consecutive, repetând fiecare număr și alternând semnele + și - astfel:

A	B	C	D	E	F	G	H	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4		12	-12	13	-13

- transformă mesajul într-un șir de numere (în care zero semnifică spațiul liber dintre două cuvinte) și aranjează șirul de numere într-o matrice pătratică $T \in M_3(\mathbb{Z})$, citite pe linii, începând cu prima linie, în ordinea trimiterii;

- folosește matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pe post de "cheie" de decodificare și obține matricea

$$T = C \cdot X$$

Într-o zi Simona i-a trimis lui Cătălin mesajul KIIAC GOM. Decodificați acest mesaj, citit din matricea X.

Soluție.

Mesajul trimis, aranjat în matricea T este $T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ 1p

$T = C \cdot X \Rightarrow X = C^{-1} \cdot T$ 1p

$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2p

$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ 2p

Transpunem mesajul în litere și obținem FACDECMMI 1p

4. Se dau funcțiile $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{1}{m} \cdot x + m$, unde m este un parametru rațional pozitiv și fie G_m graficul funcției f_m .

- a) Dacă $p, q \in \mathbb{Q}_+$ sunt distincte, determinați punctul de intersecție al graficelor G_p și G_q .
 b) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere naturale consecutive, atunci aria triunghiului determinat de intersecțiile graficelor G_a, G_b și G_c este egală cu 1.

Soluție.

- a) Fie $P(\alpha, \beta) \in G_p \cap G_q$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Trebuie să avem $f_p(\alpha) = f_q(\alpha) = \beta \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{p} \cdot \alpha + p = \beta \\ \frac{1}{q} \cdot \alpha + q = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = pq \\ \beta = p + q \end{cases} \Rightarrow P(pq, p + q) \dots\dots\dots 2p$

b) Fie $a, a+1$ și $a+2$ cele trei numere naturale consecutive 1p

Avem $G_a \cap G_{a+1} \equiv A(a^2 + a, 2a + 1)$, $G_a \cap G_{a+1} \equiv B(a^2 + 2a, 2a + 2)$ și

$G_{a+1} \cap G_{a+2} \equiv C(a^2 + 3a + 2, 2a + 3) \dots\dots\dots 1p$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} a^2 + a & 2a + 1 & 1 \\ a^2 + 2a & 2a + 2 & 1 \\ a^2 + 3a + 2 & 2a + 3 & 1 \end{vmatrix} \frac{L_2 - L_1}{L_3 - L_1} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} a^2 + a & 2a + 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a + 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \dots\dots\dots 2p$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Cătălin alege, la întâmplare, un element al inelului \mathbb{Z}_n . Aflați probabilitatea ca elementul ales să fie inversabil, în fiecare din cazurile:
- a) $n = 12$;
 b) $n = 2011$ (2011 este număr prim).

Soluție.

a) \mathbb{Z}_{12} are patru elemente inversabile, deci probabilitatea cerută este $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ 3p

b) \mathbb{Z}_{2011} este corp, deoarece 2011 este număr prim. 2p

Rezultă că orice element nenul este inversabil, deci probabilitatea dorită este $\frac{2010}{2011}$ 2p

2. Populația unei localități este $P = P(t)$, unde $P(t)$ reprezintă numărul de locuitori la timpul t , exprimat în ani. Rata de creștere a populației este data de legea $P'(t) = t \cdot e^t$, unde $e \approx 2,7$ este baza logaritmului natural, iar $P'(t)$ semnifică derivata funcției P . Dacă inițial (la timpul $t_0 = 0$) numărul de locuitori ai localității era 2011, câți locuitori vor fi în acea localitate după 5 ani ? $[e^5 = 148,5]$.

Soluție.

$P(t) = \int t \cdot e^t dt$ 1p

Integrăm prin părți

$P(t) = t \cdot e^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C$ 3p

$P(0) = 2011 \Rightarrow C = 2012$ 1p

$P(t) = 2012 + (t-1)e^t$ 1p

$P(5) = 2012 + 4 \cdot e^5 \approx 2606$ locuitori 1p

3. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid |ad| + |bc| = 1, |ab| + |cd| = 0 \right\}$.

i) Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, demonstrați că A, A^2, A^3, A^4, AB și A^2B sunt din G .

ii) Determinați cardinalul mulțimii G .

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluție.

i) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A^4 = I_2; AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^2B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; iar apartenența lor la

G este evidentă 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

- ii) Din $|ab| + |cd| = 0$ obținem că $ab = cd = 0$, iar din $|ad| + |bc| = 1$ deducem că produsul elementelor de pe o diagonală este 0, pe cealaltă diagonală fiind ± 1 1p
 Așadar, matricele din G au pe o diagonală zerouri, iar pe cealaltă 1 sau -1 , în orice combinație. În total, G va conține $2^3 = 8$ matrice. 1p
 iii) $B^2 = I_2$ și $A^3 \cdot B = B \cdot A \in G$ 1p
 Deducem $G = \{I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}$ 1p
 Construim tabela Cayley a operației de înmulțire pe G și observăm că operația este bine definită. 1p
 Înmulțirea matricelor este asociativă, I_2 este element neutru și observăm din tabla operației că înmulțirea este comutativă și că orice element este simetrizabil. 1p
4. Cătălin are la dispoziție 100 de recipiente de formă sferică S_1, S_2, \dots, S_{100} și 10 litri de vin. Știind că raza recipientului S_n este $r_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ decimetri, oricare ar fi $n = \overline{1,100}$, stabiliți dacă îi sunt suficienți cei 10 litri pentru a umple toate recipientele.

Notă. Se admite cunoscut faptul că volumul unei sfere de rază $r > 0$ este $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Lucian - Georges Lăduncă, Iași

Soluție:

Volumul recipientului sferic de rază r_n este $V_n = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{n^2}$ litri, $\forall n = \overline{1,100}$, deci suma volumelor celor 100 de recipiente este $V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} \right)$ litri. 3p

Dar

$$V < \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) = \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(2 - \frac{1}{100} \right) < \frac{4\pi}{3} \cdot 2 < \frac{4}{3} \cdot 3,2 \cdot 2 < 8,6 \text{ litri. 3p}$$

În concluzie, sunt suficienți cei 10 litri. 1p